Translation of ***Happy Numbers : Dev Chandan & Adhiraj Patil*** From Azim Premji University At Right Angles_November, 2017

हैप्पी संख्याएँ

देव विनोद चन्दन और अधिराज पाटिल

मुख्य शब्द : हैप्पी नम्बर, पुनरावृत्ति, चक्र

इस छोटी-सी टिप्पणी में हम 'हैप्पी संख्याओं' की बात करेंगे। चूँकि यह संख्या के आंकिक निरूपण पर आधारित है, इसलिए हम शुरू में ही स्पष्ट कर देते हैं कि संख्याओं का आधार क्या होगा। *इस पूरी पड़ताल के दौरान आधार 10 होगा।*

पुनरावृत्ति (Iteration) – किसी भी धनात्मक पूर्णांक से शुरुआत करें और इसके अंकों के वर्गों के योग की गणना करें। अब इस क्रिया से हासिल हुई संख्या के अंकों के साथ भी यही करें, फिर नई संख्या के लिए भी इसे दोहराएँ और इसकी पुनरावृत्ति करते रहें। (सम्पादक की टिप्पणी – पुनरावृत्ति किसी क्रिया या क़दम को बार-बार दोहराते जाना है। गणितज्ञों ने अलग-अलग प्रकार की कई पुनरावृत्तियों का अध्ययन किया है। एक जानी-मानी पुनरावृत्ति यूक्लिड के GCD एल्गोरिद्म में उपयोग में लाई जाती है।)

इस पुनरावृत्ति को हम ***वर्गों का योग पुनरावृत्ति (SSQ iteration –Sum of squares iteration)***

उदाहरण के लिए हम 2375 से शुरुआत करते हैं। इसके अंकों के वर्गों का योग $2^2 + 3^2 + 7^2 + 5^2 = 87$ है। इस तरह प्राप्त संख्या के वर्गों का योग है $8^2 + 7^2 = 64 + 49 = 113$। इसे जारी रखें तो यह मिलेगा :

$2375 \to 87 \to 113 \to 11 \to 2 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58$

$\to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58$

$\to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58$

$\to$ .... $\to$ ....

इस पर ग़ौर करें कि हम एक चक्र में फँस गए हैं : 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37 संख्याओं का अनुक्रम अनगिनत बार आता है। (आप देखेंगे कि हम इसे **चक्र** क्यों कहते हैं; जबकि यह एक बन्द लूप है।)

अब हम एक दूसरी संख्या, मान लें कि 55 से शुरू करते हैं। उपर्युक्त तरीक़े से वर्गों के जोड़ करने पर हम जो शृंखला पाते हैं, वह है – 55, 50, 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58,....।

हम फिर उसी तरह (89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58) के चक्र के बीच उलझ गए हैं!

अन्य संख्याओं के साथ प्रयोग करने पर भी हम पाते हैं कि हम अक्सर इस चक्र में घिर जाते हैं। हालाँकि, यही एकमात्र सम्भव परिणाम नहीं है। उदाहरणार्थ 49 से शुरू करें तो हम यह शृंखला पाएँगे– 49, 97, 130, 10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1...

अब ग़ौर करें कि यहाँ क्या हो रहा है ? किसी पड़ाव पर SSQ का मान 1 हो जाता है, और एक बार ऐसा हो जाने पर पुनरावृत्ति की क्रिया को दोहराने पर भी यह 1 ही रहेगा : 1→1→1→...

एक और संख्या लेते हैं, जो इसी तरह का परिणाम देती है। 193 से शुरू करें, तो यह परिणाम मिलता है– 193, 91, 82, 68, 100, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,...

इस बिन्दु पर हम पूछते हैं : *किन संख्याओं से शुरू करने पर हम 1 पर अटक जाते हैं?*

अन्तराल	इस अन्तराल की हैप्पी संख्याएँ
1–100	1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100
101–200	103, 109, 129, 130, 133, 139, 167, 176, 188, 190, 192, 193
201–300	203, 208, 219, 226, 230, 236, 239, 262, 263, 280, 291, 293
301–400	301, 302, 310, 313, 319, 320, 326, 329, 331, 338, 356, 362, 365, 367, 368, 376, 379, 383, 386, 391, 392, 397
401–500	404, 409, 440, 446, 464, 469, 478, 487, 490, 496
501–600	536, 556, 563, 565, 566
601–700	608, 617, 622, 623, 632, 635, 637, 638, 644, 649, 653, 655, 656, 665, 671, 673, 680, 683, 694, 700
701–800	709, 716, 736, 739, 748, 761, 763, 784, 790, 793
801–900	802, 806, 818, 820, 833, 836, 847, 860, 863, 874, 881, 888, 899
901–1000	901, 904, 907, 910, 912, 913, 921, 923, 931, 932, 937, 940, 946, 964, 970, 973, 989, 998, 1000

1 से 1000 तक हैप्पी संख्याओं की सूची

वे संख्याएँ, जिनमें यह गुणधर्म हो कि यदि हम उन पर SSQ पुनरावृत्ति की क्रिया करें तो वे अन्ततः 1 पर अटक जाएँ, *हैप्पी संख्याएँ* कहलाती हैं।

क्या हैप्पी संख्या को प्राप्त करने का कोई सूत्र है? नहीं, ऐसा लगता तो नहीं है। ऊपर दी गई तालिका में 1 से लेकर 1000 के बीच की सभी हैप्पी संख्याएँ दी गई हैं। हमने अपने हाथों से (manually) गणना करके यह संख्याएँ प्राप्त की हैं।

301 से 400, 601 से 700 और 901 से 1000 के बीच की हैप्पी संख्याओं की बड़ी तादाद पर ग़ौर करें। 501 और 600 के बीच की हैप्पी संख्याओं की कम तादाद पर भी ग़ौर करें। इतना बड़ा अन्तर काफ़ी हैरान करने वाला है।

देव विनोद चन्दन फिलहाल बिलाबोंग हाई स्कूल, माहिम, मुम्बई की दसवीं कक्षा में पढ़ रहे हैं। उन्होंने चिन्मय आश्रम, पुणे में विनय नायर के "वैदिक गणित कैम्प" में हैप्पी संख्याओं पर काम किया। वे अपने माता-पिता और छोटे भाई के साथ रहते हैं। उन्हें क्रिकेट, टेबल टेनिस और फुटबॉल में रुचि है। वे योग के उत्साही विद्यार्थी हैं। उनसे devvchandan@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अधिराज पाटिल SAS बिलाबोंग हाई स्कूल माहिम, मुम्बई के विद्यार्थी हैं। हम उनका फ़ोटो और जीवन-वृत्त नहीं प्राप्त कर सके।

सम्पादकीय टिप्पणी

यह आलेख विनय नायर द्वारा SAS बिलाबोंग हाई स्कूल में आयोजित वैदिक गणित कार्यशाला के परिणामस्वरूप तैयार हुआ। देव चन्दन और अधिराज पाटिल को हैप्पी संख्याओं की अवधारणा पर अन्वेषण के लिए कहा गया था। प्रोजेक्ट को 2-3 दिन में पूरा करना था। साथ ही अन्वेषकों को हाथ से गणना करनी थी, किसी भी तरह के कैलकुलेटर, सेलफ़ोन या कम्प्यूटर एप्लीकेशन को उपयोग में नहीं लाना था। इसलिए उन्होंने संख्याओं को आपस में बाँट लिया और उन पर काम किया। और सभी संख्याओं की हाथ से गणना, पुनर्गणना की। यह आलेख उसी का परिणाम है।

अनुवाद : मनोज कुमार झा **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी
कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन :** राजेश उत्साही, कविता तिवारी